Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Aus einer Urliste mit 123 Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{123}, y_{123})$ konnte bereits berechnet werden:

$$\sum_{j=1}^{123} x_j = 8.929, \quad \sum_{j=1}^{123} x_j^2 = 117.969 \text{ und } \bar{y} = -0.120, \quad s_y^2 = 4.750, \quad \sum_{j=1}^{123} x_j y_j = -111.579.$$

Berechnen Sie aus diesen gegebenen Informationen das Stichprobenmittel $\overline{x}$, die Stichproben-Varianz s_x^2 und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.

$\bar{x} =$ 0.072

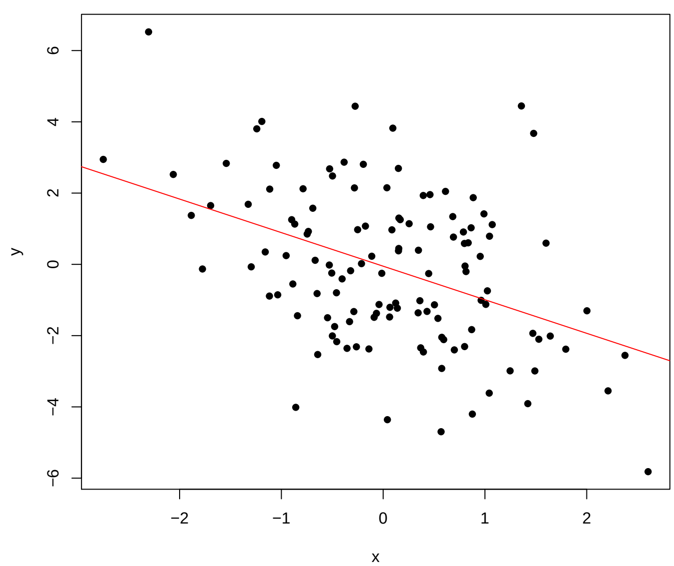
$s_x^2 =$ 0.961

$r_{xy} =$ -0.424

Berechnen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* x$.

$a^* =$ -0.188

$b^* =$ -0.943



Zeichnen Sie die Regressionsgerade in die oben angegebene Punktwolke ein.

b) Im folgenden sind die ersten 15 Werte $x_1, \ldots, x_{15}$ der Urliste gegeben, wobei diese sortiert wurden und der größte Wert unbekannt ist.

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x_{(j)}$	-2.7	-2.3	-2.1	-1.9	-1.8	-1.7	-1.5	-1.3	-1.3	-1.2	-1.2	-1.2	-1.1	-1.1	?

Berechnen Sie von **dieser** (unvollständigen) Stichprobe $x_1, \ldots, x_{15}$ den Median, das untere und das obere Quartil, sowie den Quartilsabstand.

Median = -1.3

oberes Quartil = -1.2

unteres Quartil = -1.9

Quartilsabstand = 0.7

Aufgabe 2 (10 Punkte)
Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 1, 2\}$ und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-2, 0, 1\}$. Die folgende Tabelle soll die gemeinsame Verteilung $f_{X,Y}(i,j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $i = -1, 1, 2$ und $j = -2, 0, 1$ angeben.

	$i = -1$	$i = 1$	$i = 2$	$\mathbb{P}(Y = j)$
$j = -2$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$j = 0$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$j = 1$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\mathbb{P}(X = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

a) Vervollständigen Sie die obige Tabelle, wobei zusätzlich $\mathbb{P}(X = 2 | Y = 0) = 1$ bekannt sei.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte von X und Y, die Varianzen von X und Y und die Kovarianz von X und Y.

$\mathbb{E}[X] =$ $\boxed{1}$ $\quad$ $\mathbb{E}[Y] =$ $\boxed{-\frac{3}{8}}$

$\mathbb{V}(X) =$ $\boxed{\frac{3}{2}}$ $\quad$ $\mathbb{V}(Y) =$ $\boxed{\frac{111}{64}}$

$C(X, Y) =$ $\boxed{-\frac{1}{4}}$

c) Kreuzen Sie an.

Die Zufallsvariablen X und Y sind
- ☐ stochastisch unabhängig.
- ■ nicht stochastisch unabhängig.

d) Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit.

$\mathbb{P}(X \geq 0 | Y > 0) =$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

Es gilt

$$\mathbb{P}(X \geq 0 | Y > 0) = \frac{\mathbb{P}(X \geq 0, Y > 0)}{\mathbb{P}(Y > 0)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \frac{1}{2}.$$

e) Es seien $A := \{X = 2\}$ und $B := \{Y = -2\}$. Berechnen Sie den folgenden Erwartungswert.

$\mathbb{E}[1_A \cdot 1_B] =$ $\boxed{\frac{1}{8}}$

Es gilt

$$\mathbb{E}[1_A \cdot 1_B] = \mathbb{E}[1_{A \cap B}] = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(X = 2, Y = -2) = \frac{1}{8}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Eine Gruppe von drei Personen spielt folgendes Spiel: Jeder Spieler setzt 1 Euro und notiert unabhängig von allen anderen und gleichverteilt seinen persönlichen zufälligen Tipp, auf welche Seite (d.h. Kopf oder Zahl) eine im Anschluss zu werfende faire Münze fallen wird. Die gesammelten Einsätze werden dann zu gleichen Teilen auf die Gewinner umgelegt und ausbezahlt (und verfallen, wenn niemand richtig getippt hat).

a) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $Y_i := \mathbf{1}\{\text{Spieler } i \text{ tippt richtig}\}$, $i = 1, \ldots, 3$?

$$Y_i \sim \boxed{Bin(1, 1/2) = \mathcal{U}(\{0,1\})}$$

Es bezeichne nun die Zufallsvariable X die Auszahlung an Spieler 1 nach einer Runde.

b) Bestimme Sie die Zähldichte f_X von X.

$$f_X(0) = \boxed{\tfrac{1}{2}} \qquad f_X(1) = \boxed{\tfrac{1}{8}}$$

$$f_X\left(\frac{3}{2}\right) = \boxed{\tfrac{1}{4}} \qquad f_X(3) = \boxed{\tfrac{1}{8}}$$

c) Es sei Z der Betrag, den Spieler 1, abzüglich seines Einsatzes, nach einer Runde gewinnt. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Z.

$$\mathbb{E}(Z) = \boxed{-\tfrac{1}{8}} \qquad \mathbb{V}(Z) = \boxed{\tfrac{115}{64}}$$

d) Es werden $n \in \mathbb{N}$ Runden in unabhängiger Weise gespielt und es bezeichnen Z_i, $i = 1, \ldots, n$, den Gewinn von Spieler 1 in der i-ten Runde und

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i,$$

den Gesamtgewinn nach n Runden. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot a}{\sqrt{n} \cdot b} \leq t\right) = \Phi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$a = \boxed{-\tfrac{1}{8}} \qquad b = \boxed{\sqrt{\tfrac{115}{64}}}$$

Jetzt spielen Spieler 1 und Spieler 2 (im Geheimen) zusammen, indem einer von ihnen völlig willkürlich eine Seite tippt und sein Partner genau das Gegenteil notiert. Es bezeichne G die zufällige Auszahlung, welche die beiden insgesamt erhalten.

e) Berechnen Sie den Erwartungswert von G.

$$\mathbb{E}(G) = \boxed{\tfrac{9}{4}}$$

Lösungsvorschlag:
Eine mögliche Modellierung ist gegeben durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei

$$\Omega := \{0,1\}^4, \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \omega \in \Omega.$$

Für $(\omega_1, \dots, \omega_4) \in \Omega$ beschreibe ω_i den Tipp des Spielers i, $i = 1, \dots, 3$ und ω_4 den Ausgang des Münzwurfes. Somit ergibt sich:

a) $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \frac{|\{\omega \in \Omega | \omega_i = 0\}|}{|\Omega|} = 1/2$ und deshalb $Y_i \sim Bin(1, 1/2)$.

b) Man berechnet

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 = 3) &= \mathbb{P}(\text{Nur Spieler 1 gewinnt}) = \frac{|\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}|}{|\Omega|} = 1/8. \\
\mathbb{P}(X_1 = 3/2) &= \mathbb{P}(\text{Spieler 1 und genau ein anderer Spieler gewinnt}) \\
&= \frac{|\{(1,1,0,1),(0,0,1,0),(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}|}{|\Omega|} = 1/4. \\
\mathbb{P}(X_1 = 1) &= \mathbb{P}(\text{Alle Spieler gewinnen}) = \frac{|\{(1,1,1,1),(0,0,0,0)\}|}{|\Omega|} = 1/8
\end{aligned}$$

und somit gilt $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 1 - 1/8 - 1/4 - 1/8 = 1/2$.

c) Es gilt $Z = X_1 - 1$ und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[X_1] - 1 = 3 \cdot 1/8 + 1/4 \cdot 3/2 + 1 \cdot 1/8 - 1 = -1/8, \\
\mathbb{V}[Z] &= \mathbb{V}[X_1] = \mathbb{E}\left[X_1^2\right] - \mathbb{E}[X_1]^2 = 115/64.
\end{aligned}$$

d) Nach dem zentralen Grenzwertsatz gelten $a = \mathbb{E}[Z_1] = -1/8$ und $b = \sqrt{\mathbb{V}(Z_1)} = \sqrt{\frac{115}{64}}$.

Nachdem Spieler 1 und Spieler 2 (im Geheimen) zusammen spielen, indem einer von ihnen völlig willkürlich eine Seite tippt und sein Partner genau das Gegenteil notiert, verkleinert sich der Grundraum Ω zu

$$\Omega_{\text{neu}} := \{(1,0,1,0),(1,0,1,1),(1,0,0,0),(1,0,0,1)\}.$$

Dann erhalten wir:

e) Die Zufallsvariable G nimmt die Werte $\{3/2, 3\}$ an. Die zugehörigen W'keiten berechnen sich zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(G = 3/2) &= \mathbb{P}(\text{Spieler 3 gewinnt und Spieler 1 oder Spieler 2 gewinnt}) \\
&= \frac{|\{(1,1,0,1),(0,1,0,0)\}|}{|\Omega_{\text{neu}}|} = 1/2
\end{aligned}$$

und somit $\mathbb{P}(G = 3) = 1/2$. Für den Erwartungswert folgt also

$$\mathbb{E}[G] = 1/2 \cdot 3/2 + 1/2 \cdot 3 = 9/4.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In einer Fertigungshalle werden die Böden und die Mäntel für runde Blechdosen gefertigt. Der Umfang U des Bodens soll 20 cm lang sein und hat einen zufälligen Produktionsfehler der normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 2. Die Sollhöhe H beträgt 10 cm bei einem zufälligen Fehler der normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz 2 cm. Die Solllänge L beträgt 21 cm bei einem zufälligen Fehler der normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz 5 cm. Dabei seien U, H und L unabhängig voneinander.

Hinweis: Falls Sie die Normalverteilungstabelle benötigen, runden Sie die dafür verwendenten Ergebnisse auf **zwei** Nachkommastellen.

a) Geben Sie die Parameter der folgenden Verteilungen an.

(i) U hat die Verteilung $\mathcal{N}\left(\boxed{20}, \boxed{4}\right)$.

(ii) H hat die Verteilung $\mathcal{N}\left(\boxed{10}, \boxed{2}\right)$.

(iii) L hat die Verteilung $\mathcal{N}\left(\boxed{21}, \boxed{5}\right)$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der zufälligen Fläche $F := H \cdot L$

$\mathbb{E}[F] = \boxed{210}$ $\qquad$ $\mathbb{V}[F] = \boxed{1392}$

Es gelten

$$\mathbb{E}[F] = \mathbb{E}[H \cdot L] = \mathbb{E}[H]\mathbb{E}[L] = 10 \cdot 21 = 210$$

und

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[F] &= \mathbb{E}[F^2] - \mathbb{E}[F]^2 = \mathbb{E}[H^2 \cdot L^2] - 210^2 = \mathbb{E}[H^2] \cdot \mathbb{E}[L^2] - 210^2 \\ &= (\mathbb{V}[H] + \mathbb{E}[H]^2)(\mathbb{V}[L] + \mathbb{E}[L]^2) - 210^2 = 1392.\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Verteilung der Differenz zwischen der Länge des Mantels und des Umfangs des Bodens

$L - U$ hat die Verteilung $\boxed{\mathcal{N}(1, 9)}$.

d) Schätzen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung bestmöglich ab.

$$\mathbb{P}\left(\left\{L - U \leq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{L - U \geq \frac{3}{2}\right\}\right) \leq \boxed{36}$$

Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\left\{L - U \leq \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{L - U \geq \frac{3}{2}\right\}\right) = \mathbb{P}\left(|L - U - \mathbb{E}[L - U]| \geq \frac{1}{2}\right) \leq \frac{\mathbb{V}(L - U)}{(\frac{1}{2})^2} = 36.$$

e) Erklären Sie, warum die Abschätzung aus Teil e) nicht hilfreich ist.

Wahrscheinlichkeiten sind immer kleiner oder gleich 1.

f) Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeit exakt.

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq L - U \leq \frac{3}{2}\right) = \boxed{0.135}$$

Es gilt

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq L - U \leq \frac{3}{2}\right) = \mathbb{P}\left(-\frac{1}{6} \leq \frac{L-U-1}{3} \leq \frac{1}{6}\right) = \Phi(\frac{1}{6}) - \Phi(-\frac{1}{6}) \approx 2\Phi(0.17) - 1 = 0.135.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Ein Merkmal habe die Dichte

$$x \mapsto f_\vartheta(x) = \begin{cases} \dfrac{\vartheta^5 \cdot x^4}{4!} e^{-\vartheta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter ist. Der unbekannte Parameter ϑ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ sind.

a) Geben Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ an.

$$L_x(\vartheta) = \boxed{\frac{\vartheta^{5n}}{(4!)^n} \cdot \exp\left(-\vartheta \sum_{j=1}^n x_j\right) \cdot \prod_{j=1}^n x_j}$$

b) Geben Sie die Log-Likelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$ an.

$$M_x(\vartheta) = \boxed{5n \log \vartheta - n \log(4!) + \sum_{j=1}^n \log(x_j) - \vartheta \sum_{j=1}^n x_j}$$

c) Geben Sie Ableitung $M_x'(\vartheta)$ der Log-Likelihood-Funktion an.

$$M_x'(\vartheta) = \boxed{\frac{5n}{\vartheta} - \sum_{j=1}^n x_j}$$

d) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\vartheta}$ für ϑ.

$$\widehat{\vartheta} = \boxed{\frac{5n}{\sum_{j=1}^n x_j} = \frac{5}{\bar{x}}}$$

e) Bestimmen Sie $\mathbb{E}_\vartheta(\widehat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n))$.

$$\mathbb{E}_\vartheta(\widehat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)) = \boxed{\frac{5n}{5n-1}\vartheta}$$

Zunächst ist f die Dichte einer $\Gamma(5, \vartheta)$ Verteilung und wegen der Unabhängigkeit der $X_1, \ldots, X_n$ und dem Additionsgesetz der Gammaverteilung gilt $\sum_{j=1}^n X_j \sim \Gamma(5n, \lambda)$. Damit folgt (vgl. Skript Bsp 12.16) $\mathbb{E}_\vartheta\left((\sum_{j=1}^n X_j)^{-1}\right) = \frac{\vartheta^{5n}}{\Gamma(5n)} \frac{\Gamma(5n-1)}{\vartheta^{5n-1}} = \frac{\vartheta}{5n-1}$ und damit $\mathbb{E}_\vartheta(\widehat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)) = \frac{5n}{5n-1}\vartheta$.

f) Kreuzen Sie an.

Der Maximum-Likelihood-Schätzer ist $\widehat{\vartheta}$ ist für ϑ
- ☐ erwartungstreu.
- ■ asymptotisch erwartungstreu.

g) Bestimmen Sie den Momenten-Schätzer $\widetilde{\vartheta}$ für ϑ.

$$\widetilde{\vartheta} = \boxed{\frac{5}{\bar{x}}}$$

Zunächst gilt $\mathbb{E}_\vartheta(X_1) = \frac{5}{\vartheta}$ und damit lautet der Ansatz für den Momentenschätzer $\bar{x} = \frac{5}{\vartheta}$. Auflösen nach ϑ liefert die Lösung.

h) Bestimmen Sie für $\vartheta = 5$ den folgenden Grenzwert.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j - 1\right| \leq 0.05\right) = \boxed{1}$$

Für $\vartheta = 5$ gilt $\mathbb{E}_\vartheta(X_1) = 1$. Damit folgt die Lösung aus dem Gesetz großer Zahlen.