

Musterlösungen

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$ und den Kenngrößen:

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 11.4, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j = 24.1, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 16.2, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 69.55, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j y_j = 25.93.$$

- a) Geben Sie die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} an.

$$s_x = \boxed{0.597}$$

$$s_y = \boxed{1.129}$$

$$r_{xy} = \boxed{-0.255}$$

- b) Geben Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x an.

$$a^* = \boxed{2.959}$$

$$b^* = \boxed{-0.482}$$

Es sei weiterhin die folgende Urliste gegeben:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.8	1.5	1.2	2.1	1.7	0.2	0.9	0.4	1	1.6

- c) Geben Sie das 0.31-getrimmte Stichproben-Mittel von $(x_1, \dots, x_{10})$ an.

$$\bar{x}_{0.31} = \boxed{1.15}$$

- d) Geben Sie den Median und das untere und obere Quartil von $(x_1, \dots, x_{10})$ an.

$$\tilde{x}_{0.5} = \boxed{1.1}$$

$$\tilde{x}_{0.75} = \boxed{1.6}$$

$$\tilde{x}_{0.25} = \boxed{0.8}$$

Lösungsvorschlag:

- a) Wir berechnen direkt nach Definition $s_x = 0.597$, 1P $s_y = 1.129$ 1P und $r_{xy} = -0.255$. 1P
- b) Wir berechnen $b^* = -0.482$, 0.5P $a^* = 2.959$. 0.5P
- c) Nach dem Ordnen der Stichprobe berechnen wir $k = \lfloor 3.1 \rfloor$ und somit

$$\bar{x}_{0.31} = \frac{1}{10}(0.9 + 1 + 1.2 + 1.5) = 1.15. \text{ 1P }$$

- d) Nach dem Ordnen der Stichprobe berechnen wir

$$\tilde{x}_{0.5} = \frac{1}{2}(x_{(5)} + x_{(6)}) = \frac{1}{2}(1 + 1.2) = 1.1, \text{ 1P }$$

$$\tilde{x}_{0.25} = x_{(\lfloor 0.25 \cdot 10 \rfloor + 1)} = x_{(3)} = 0.8, \text{ 1P }$$

$$\tilde{x}_{0.75} = x_{(\lfloor 0.75 \cdot 10 \rfloor + 1)} = x_{(8)} = 1.6. \text{ 1P }$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei (X, Y) ein Zufallsvektor mit $X \in \{-1, 1\}$ und $Y \in \{-1, 0, 1\}$. Die folgende Tabelle soll die gemeinsame Verteilung $f_{X,Y}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $i = -1, 1$ und $j = -1, 0, 1$ angeben. Dabei sind $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ konstant.

	$j = -1$	$j = 0$	$j = 1$
$i = -1$	c_1	c_1	c_2
$i = 1$	c_1	$2c_1$	$3c_1$

- a) Geben Sie die Menge aller $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ an, sodass die obige Vorschrift eine Zähldichte beschreibt.

$$\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 : 1 = 8c_1 + c_2\}$$

- b) Bestimmen Sie alle $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, sodass $f_{X,Y}$ weiterhin eine Zähldichte beschreibt und zudem $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{5}{8}$ gilt.

$$c_1 = \frac{3}{40} \quad c_2 = \frac{2}{5}$$

Für die restliche Aufgabe sei nun $c_1 = \frac{1}{8}$ und $c_2 = 0$ fest.

- c) Geben Sie die Zähldichte f_X von X an.

$$f_X(-1) = \frac{1}{4} \quad f_X(1) = \frac{3}{4}$$

- d) Geben Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten an.

$$\mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{5}{8}$$

$$\mathbb{P}(X = -1 \mid Y = -1) = \frac{1}{2}$$

- e) Geben Sie den Erwartungswert von Y an.

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{8}$$

- f) Kreuzen Sie an.

Die Zufallsvariablen X und Y sind ☐ stochastisch unabhängig.
☐ nicht stochastisch unabhängig.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschlag:

- a) Da für eine Zähldichte die Gleichung $1 = \sum_{i=-1,1} \sum_{j=-1,0,1} f_{X,Y}(i,j)$ gelten muss, ist die Lösung gegeben durch

$$\{(c_1, c_2) \in [0, 1]^2 \mid 1 = 8c_1 + c_2\}. \quad \boxed{1P}$$

- b) Nun gilt zusätzlich

$$\frac{5}{8} = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1, X = -1) + \mathbb{P}(Y = 1, X = 1) = c_2 + 3c_1,$$

was als einzige Lösung $c_1 = \frac{3}{40}$ $\boxed{1P}$ und $c_2 = \frac{2}{5}$ $\boxed{1P}$ zulässt.

- c) Es gilt

$$f_X(-1) = \sum_j \mathbb{P}(X = -1, Y = j) = 2 \cdot c_2 = 2 \cdot 1/8 = \frac{1}{4} \quad \boxed{1P}$$

und analog $f_X(1) = \frac{3}{4}$. $\boxed{1P}$

- d) Die Additivität eines W'maßes liefert

$$\mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\}) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(Y = 0).$$

Mit $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 0, X = -1) + \mathbb{P}(Y = 0, X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$ und Aufgabenteil c) erhalten wir

$$\mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{Y = 0\}) + \mathbb{P}(\{X = -1\} \cap \{Y = 0\}) = \frac{5}{8}. \quad \boxed{1P}$$

Mit $\mathbb{P}(Y = -1) = \mathbb{P}(Y = -1, X = -1) + \mathbb{P}(Y = -1, X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8}$ und der Definition der bedingten W'keit erhalten wir

$$\mathbb{P}(X = -1 \mid Y = -1) = \frac{\mathbb{P}(X = -1, Y = -1)}{\mathbb{P}(Y = -1)} = \frac{1}{2}. \quad \boxed{1P}$$

- e) Es gilt nach Definition des Erwartungswertes

$$\mathbb{E}(Y) = -1 \cdot 2c_1 + 1 \cdot (c_2 + 3c_1) = \frac{1}{8}. \quad \boxed{1P}$$

- f) Die Zufallsvariablen sind nicht stochastisch unabhängig $\boxed{1P}$, da z.B.

$$\mathbb{P}(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{8} = \mathbb{P}(X = -1) \cdot \mathbb{P}(Y = -1) \quad \boxed{1P}$$

gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Nach dem Beheben einer Sicherheitslücke in einer CPU, die das „Meltdown“-Angriffsszenario erlaubt, verändert sich die zufällige Laufdauer eines Programmes um die Zufallsvariable Z . Dabei gilt

$$Z := \nu \cdot Y + \mu$$

mit $Y \sim \text{Exp}(1)$ und unbekanntem $\vartheta = (\mu, \nu)$, $\nu > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- a) Geben Sie die Verteilungsfunktion F_Z von Z sowie die Dichte f_Z von Z an.

$$F_Z(t) = \boxed{\mathbb{1}\{t > \mu\}(1 - e^{-\frac{t-\mu}{\nu}})}$$

$$f_Z(t) = \boxed{\mathbb{1}\{t > \mu\}\frac{1}{\nu}e^{-\frac{t-\mu}{\nu}}}$$

- b) Geben Sie $m_1(\mu, \nu) := \mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ sowie $m_2(\mu, \nu) := \mathbb{E}(Z^2)$ an.

$$m_1(\mu, \nu) = \boxed{\nu + \mu} \quad \mathbb{V}(Z) = \boxed{\nu^2}$$

$$m_2(\mu, \nu) = \boxed{\nu^2 + (\nu + \mu)^2}$$

Wir beobachten nun eine Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ der Zufallsvariable Z , wobei $i, j \in \{1, \dots, n\}$ existieren mit $x_i \neq x_j$.

- c) In der Momentenschätzer-Methode werden $m_1(\mu, \nu)$ und $m_2(\mu, \nu)$ durch die entsprechenden empirischen Stichprobenmomente geschätzt. Hierbei ist

$$\hat{m}_1(x) = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \quad \hat{m}_2(x) = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- d) Geben Sie die Momentenschätzer $\hat{\mu}(x)$ und $\hat{\nu}(x)$ für μ und ν an.

$$\hat{\mu}(x) = \boxed{\hat{m}_1(x) - \sqrt{\hat{m}_2(x) - \hat{m}_1(x)^2}} \quad \hat{\nu}(x) = \boxed{\sqrt{\hat{m}_2(x) - \hat{m}_1(x)^2}}$$

Lösungsvorschlag:

a) Da $Y \sim \text{Exp}(1)$ gilt nach Definition für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\nu \cdot Y + \mu \leq t) = \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{t - \mu}{\nu}\right) \\ &= \mathbb{1}\{t > \mu\}(1 - e^{-\frac{t - \mu}{\nu}}). \end{aligned} \quad \boxed{2P}$$

Durch Differentiation folgt

$$f_Z(t) = \mathbb{1}\{t > \mu\} \frac{1}{\nu} e^{-\frac{t - \mu}{\nu}}. \quad \boxed{1P}$$

b) Da $Y \sim \text{Exp}(1)$ folgt mit den Eigenschaften des Erwartungswertes bzw. der Varianz

$$\mathbb{E}[Z] = \nu \mathbb{E}[Y] + \mu = \nu + \mu \quad \boxed{1P}$$

sowie

$$\mathbb{V}(Z) = \nu^2 \mathbb{V}(X) = \nu^2 \quad \boxed{1P}$$

und somit

$$\mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{V}(Z) + \mathbb{E}[Z]^2 = \nu^2 + (\nu + \mu)^2. \quad \boxed{1P}$$

c) Nach Skript gilt

$$\hat{m}_1(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \boxed{1P} \quad \text{und} \quad \hat{m}_2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad \boxed{1P}$$

Somit erhalten wir mit Aufgabenteil b) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \hat{m}_1(x) &= \hat{\nu}(x) + \hat{\mu}(x), \\ \hat{m}_2(x) &= \hat{\nu}(x)^2 + (\hat{\nu}(x) + \hat{\mu}(x))^2 = \hat{\nu}(x)^2 + \hat{m}_1(x)^2. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $\hat{\nu}(x) = \sqrt{\hat{m}_2(x) - \hat{m}_1(x)^2} \quad \boxed{1P}$ und wir erhalten $\hat{\mu}(x) = \hat{m}_1(x) - \sqrt{\hat{m}_2(x) - \hat{m}_1(x)^2}. \quad \boxed{1P}$

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 3 und Varianz 25. Weiter sei Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert -2 und Varianz 9. Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig.

a) Setzen Sie die richtigen Werte ein.

(i) X hat die Verteilung $\mathcal{N}\left(\boxed{3}, \boxed{25}\right)$.

(ii) Y hat die Verteilung $\mathcal{N}\left(\boxed{-2}, \boxed{9}\right)$.

(iii) $2X - 3Y$ hat die Verteilung $\mathcal{N}\left(\boxed{12}, \boxed{181}\right)$.

b) Geben Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Z)$, die Varianz $\mathbb{V}(Z)$ und die Standardabweichung σ_Z von $Z := \frac{1}{3}(X - 2)$ an.

$$\mathbb{E}(Z) = \boxed{1/3} \quad \mathbb{V}(Z) = \boxed{25/9}$$

$$\sigma_Z = \boxed{5/3}$$

c) Ermitteln Sie die folgenden Kenngrößen.

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \boxed{-6}$$

$$\mathbb{V}(X - Y) = \boxed{34}$$

$$\mathbf{C}\left(\frac{1}{2}(X - Y), \frac{1}{3}(X + Y)\right) = \boxed{8/3}$$

d) Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit.

$$\mathbb{P}(X \geq -1) = \boxed{0.7881}$$

e) Geben Sie das 0.937 Quantil q der Verteilung von Y an.

$$q = \boxed{2.59}$$

f) Welche Verteilung hat $3 \cdot \Phi^{-1}(U) - 2$, wenn U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable ist?

$$3 \cdot \Phi^{-1}(U) - 2 \sim \boxed{\mathcal{N}(-2, 9)}$$

Lösungsvorschlag:

a) Nach Definition folgt $X \sim \mathcal{N}(3, 25)$ **0.5P** und $Y \sim \mathcal{N}(-2, 9)$ **0.5P**. Die Faltungsformel liefert $2X - 3Y \sim \mathcal{N}(12, 181)$. **1P**

b) Es gilt mit den Eigenschaften des E'wertes und der Varianz

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[1/3(X - 2)] = 1/3(\mathbb{E}[X] - 2) = 1/3, \text{ **0.5P**}$$

$$\mathbb{V}(Z) = 1/9\mathbb{V}(X) = 25/9, \text{ **1P**}$$

$$\sigma_Z = 5/3. \text{ **0.5P**}$$

c) Da X und Y unabhängig sind gilt

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = -6 \text{ **1P** } \quad \text{sowie} \quad \mathbb{V}(X - Y) = \mathbb{V}(X) + (-1)^2\mathbb{V}(Y) = 34. \text{ **1P**}$$

Die Bilinearität der Kovarianz liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\left(\frac{1}{2}(X - Y), \frac{1}{3}(X + Y)\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \mathbf{C}(X - Y, X + Y) \\ &= \frac{1}{6}(\mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) - \mathbf{C}(Y, X) + \mathbf{C}(X, Y)) = 8/3. \text{ **1P**} \end{aligned}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq -1) &= 1 - \mathbb{P}(X \leq -1) = 1 - \mathbb{P}((X - 3)/5 \leq (-1 - 3)/5) \\ &= 1 - \Phi\left(-\frac{4}{5}\right) = \Phi(0.8) = 0.7881. \text{ **1P**} \end{aligned}$$

e) Es gilt

$$\mathbb{P}(Y \leq q) = 0.937 \Leftrightarrow \mathbb{P}((Y + 2)/3 \leq (q + 2)/3) = 0.937$$

und man erhält aus der angehängten Tabelle

$$(q + 2)/3 = 1.53$$

$$\text{und somit } q = 3 \cdot 1.53 - 2 = 2.59. \text{ **2P**}$$

f) Man berechnet für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(3 \cdot \Phi^{-1}(U) - 2 \leq t) &= \mathbb{P}(\Phi^{-1}(U) \leq 1/3(t + 2)) = \mathbb{P}(U \leq \Phi(1/3(t + 2))) \\ &= \Phi(1/3(t + 2)). \end{aligned}$$

Satz 9.7 des Skriptums liefert dann $3 \cdot \Phi^{-1}(U) - 2 \sim \mathcal{N}(-2, 9)$. **1P**

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Die Zufallsvariable X habe die stetige Dichte

$$f_{\vartheta}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \vartheta^{-\frac{3}{2}} x^2 \exp(-\vartheta^{-1} x^2), \quad x \in \mathbb{R},$$

wobei $\vartheta \in \Theta := (0, \infty)$ ein unbekannter Parameter sei.

- a) Geben Sie $\mathbb{E}_{\vartheta}(X)$ und $\mathbb{E}_{\vartheta}(X^2)$ an.

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X) =$$

0

Warum ist für die Bestimmung von $\mathbb{E}_{\vartheta}(X)$ keine Rechnung erforderlich?

Grund:

Symmetrie

$$\mathbb{E}_{\vartheta}(X^2) =$$

$\frac{3}{2}\vartheta$

Begründen Sie die Berechnung von $\mathbb{E}_{\vartheta}(X^2)$:

- (b) Der Parameter ϑ soll aufgrund einer Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ geschätzt werden, wobei mit $x_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, n$ Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit gleicher Verteilung wie X gegeben sind.

Geben Sie die Likelihood-Funktion $\vartheta \mapsto L_x(\vartheta)$, die Loglikelihood-Funktion $\vartheta \mapsto M_x(\vartheta)$ und deren Ableitungsfunktion $\vartheta \mapsto M'_x(\vartheta)$ an.

$$L_x(\vartheta) = (2/\sqrt{\pi})^n \vartheta^{-3n/2} \prod_{i=1}^n x_i^2 \exp(-1/\vartheta \sum_{i=1}^n x_i^2)$$

$$M_x(\vartheta) = n \ln(2/\sqrt{\pi}) - \frac{3n}{2} \ln \vartheta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta} x_i^2$$

$$M'_x(\vartheta) = -\frac{3n}{2\vartheta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta^2} x_i^2$$

- c) Geben Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ zur Stichprobe x an.

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

- d) Ist $\hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ ein erwartungstreuer Schätzer?

Antwort: (Ja oder Nein)

Ja

Begründung der Antwort:

$$\mathbb{E}_{\vartheta} \hat{\vartheta}(X) = \mathbb{E}_{\vartheta} \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{2}{3n} \cdot n \cdot \frac{3}{2} \vartheta = \vartheta$$

Lösungsvorschlag:

- a) Es gilt $\mathbb{E}_\vartheta(X) = 0$, **1P** da die Dichte symmetrisch bezüglich $x = 0$ ist **1P**. Weiterhin berechnet man

$$\mathbb{E}_\vartheta(X^2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \vartheta^{-3/2} \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\vartheta^{-1}x^2} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \vartheta^{-3/2} \int_0^\infty x^4 e^{-\vartheta^{-1}x^2} dx.$$

Substituiert man $\vartheta^{-1}x^2 = t$, so erhält man die Gleichheit zu

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \vartheta^{-3/2} \int_0^\infty (\vartheta t)^{3/2} e^{-t} \vartheta dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \vartheta \int_0^\infty t^{5/2-1} e^{-t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \vartheta \Gamma(5/2) = \frac{3}{2} \vartheta. \text{ **3P** }$$

- b) Es gilt

$$L_x(\vartheta) = (2/\sqrt{\pi})^n \vartheta^{-3n/2} \prod_{i=1}^n x_i^2 \exp(-1/\vartheta \sum_{i=1}^n x_i^2), \text{ **1P** }$$

$$M_x(\vartheta) = n \ln(2/\sqrt{\pi}) - \frac{3n}{2} \ln \vartheta + \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta} x_i^2, \text{ **1P** }$$

$$M'_x(\vartheta) = -\frac{3n}{2\vartheta} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta^2} x_i^2 = \frac{3n}{2\vartheta^2} \left(\frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \vartheta \right). \text{ **1P** }$$

- c) Da die Funktion M'_x einen Vorzeichenwechsel von $+$ zu $-$ an der Stelle $\frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_i^2$ durchläuft ist $\hat{\vartheta}(x) = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n x_i^2$. **1P**

- d) Der gefundene ML-Schätzer ist erwartungstreu, **1P** da

$$\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}(X)] = \mathbb{E}_\vartheta \left[\frac{2}{3n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right] = \frac{2}{3n} \cdot n \cdot \frac{3}{2} \vartheta = \vartheta. \text{ **1P** }$$